SCOPRIRE LA MATEMATICA 3

LO ZERO E L'INFINITO

Mimma Margarone

La Tecnica della scuola 24 maggio 2024

LO ZERO E LA SUA STORIA

I SISTEMI DI NUMERAZIONE E LO ZERO

Contare è uno dei bisogni più antichi dell'uomo.

Lo zero ci fornisce un'ottima occasione per inquadrare il nostro sistema di numerazione.

Questo elemento ci è così familiare che non ci rendiamo conto di quanto sia stata importante la sua introduzione.

Vale la pena di ripercorrere la storia di questo protagonista poco considerato e anche poco conosciuto.

SCRIVERE I NUMERI

Scrivere i numeri è un problema di comunicazione e di linguaggio.

Se ho un solo simbolo, scrivere i numeri è semplice ma non conveniente:

I II III IIII IIIII …

Nasce allora l'idea di usare più simboli e nascono i sistemi di numerazione.

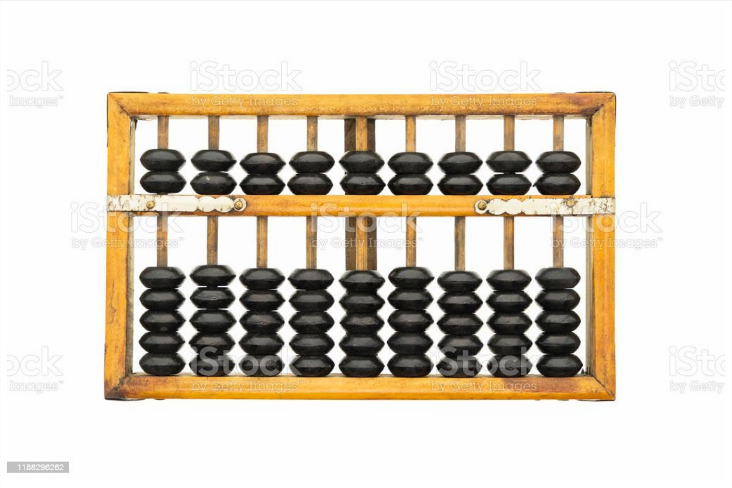
I sistemi di numerazione del passato utilizzavano un numero più o meno rilevante di simboli. I Romani introdussero l'accorgimento di scambiare l'ordine di due cifre contigue per indicare che andava effettuata la sottrazione invece che l'addizione.

I numeri venivano composti secondo una legge additiva e questo giustifica la non esigenza dello **zero, l'elemento indifferente della somma**.

E … FARE I CONTI

Se il problema di scrivere i numeri per i Greci e i Romani era risolto, fare le operazioni era complicatissimo.

Come gli Egizi, anche i Babilonesi, i Romani e gli Indiani per scrivere i numeri e fare i calcoli disponevano di un abaco o di solchi paralleli nel terreno. Per es. in un sistema di numerazione a base dieci, un sassolino di un solco aveva un valore uguale a dieci volte quello di un sassolino nel solco immediatamente precedente.



Fu proprio l'abaco a suggerire loro una delle più grandi scoperte nella storia dei numeri.

SENZA L’ABACO

Con l'abaco, ponendo due palline in due colonne, si potevano ottenere i numeri undici, oppure centouno, oppure centodieci a seconda della colonna lasciata vuota.

Senza l’abaco come indicare nella scrittura dei numeri il valore corrispondente alle colonne vuote?

Per farlo gli Indiani pensarono di usare un puntino, così come noi usiamo lo zero:

11	1.1	11.
undici	centouno	centodieci

Con l’andar del tempo il puntino si dilatò e acquistò la forma nota dello zero:

11	101	110

LO ZERO, UNA VERA RIVOLUZIONE

L'introduzione dello zero ha apportato notevoli vantaggi sia nel campo della numerazione sia nei calcoli.

Le popolazioni dell'India scrivevano i numeri usando dieci simboli.

Con lo zero eliminarono le difficoltà che presentavano anche i calcoli più semplici nei sistemi di numerazione in uso.

ALCUNE TAPPE NELLA STORIA DELLO ZERO

- Appare in India verso il 500 d.C. con la forma di un puntino o di un cerchietto
- Gli Arabi conoscono lo zero e il sistema di numerazione degli Indiani nel sec. VIII e immediatamente comprendono la grande utilità della scrittura posizionale dei numeri.
- Il primo trattato di calcolo indiano viene scritto da un matematico arabo *Ben-Musa Al-Khowarizmi*, vissuto intorno all'800 d.C..
  Dal suo nome deriva la parola **algoritmo**, mentre dal titolo della sua opera *Al gebr al mukabala* ha tratto origine la parola **algebra**.
- Attraverso gli Arabi vengono introdotte le nuove conoscenze in Europa
- In Europa si diffondono soprattutto per merito del matematico italiano Leonardo Pisano (**Fibonacci**) che nel ***Liber Abaci*** (1202) spiega il comodo sistema di numerazione e le sue applicazioni.

LO ZERO FA CARRIERA

Fino a questo punto lo zero è solo un simbolo utile per la rappresentazione dei numeri, ma **non è ancora un numero**.

Solo a poco a poco lo zero comincia ad essere considerato come numero e a rientrare nelle operazioni, anche se con qualche originalità (Legge di annullamento del prodotto – Divisori dello zero).

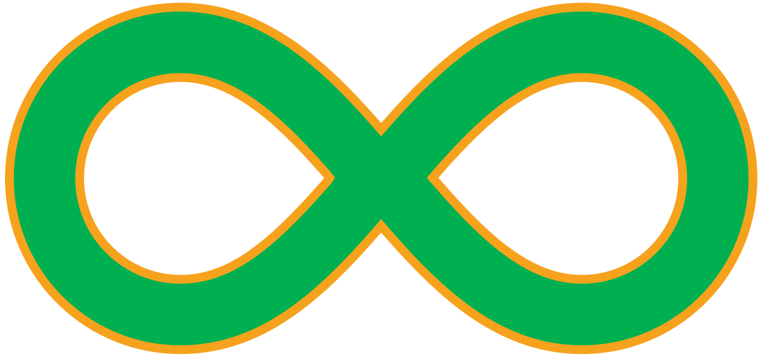
Nella matematica moderna è un concetto talmente necessario che la sua eliminazione farebbe crollare molte parti della matematica: il concetto di corpo numerico, le strutture algebriche, il continuo, il calcolo infinitesimale.

VALERE UNO ZERO

“Convenite allora con me che lo zero, questo figlio tardivo del nulla, non solo è necessario, ma di un valore inestimabile allo sviluppo incessante della scienza matematica!

Un matematico, dunque, si esprimerebbe erroneamente e tradirebbe la sua scienza se, giudicando di persona o cosa che nulla vale, dicesse che <<*vale uno zero*>>. Voi mi fareste, se mai, un grazioso complimento, giudicando così questo mio panegirico su *nulla* e *zero*.”

Michele Cipolla
Conferenza “Nulla e zero” – Palermo 1936

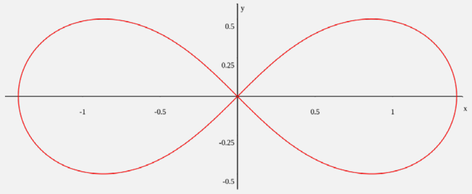


INFINITO

DA DOVE VIENE IL SIMBOLO?

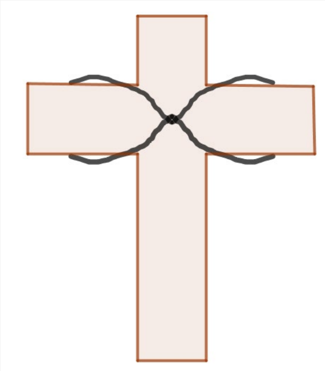
John Wallis modifica il simbolo C I Ↄ usato nella numerazione romana antica per indicare 1000

La lemniscata di Jakob Bernoulli 1694

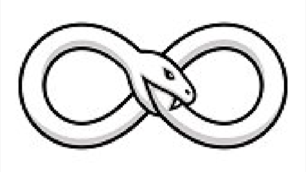


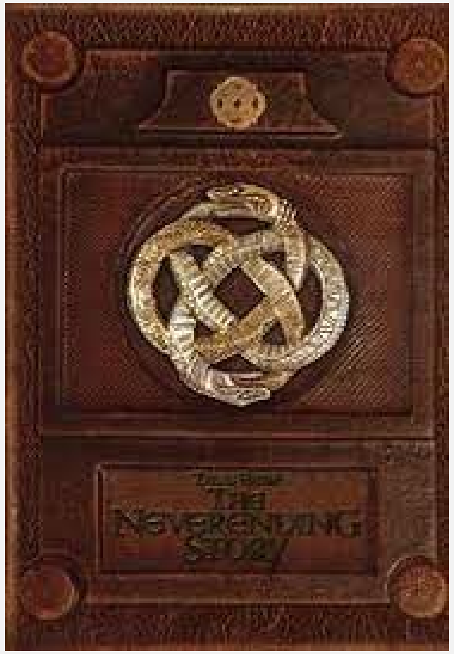
John Wallis 1655

Croce sulla tomba di San Bonifacio 700



Uroboros 1600 a. C.





IL BISOGNO DI INFINITO

In tutte le civiltà, all'origine del mondo c'è un iniziale caos, **un infinito indistinto,** che viene successivamente ordinato per renderlo più comprensibile.

Con l'evolversi delle civiltà, i vari aspetti del concetto di infinito hanno coinvolto la religione, la filosofia, la cosmologia, le scienze e la matematica alla ricerca di risposte ai tanti interrogativi che esso pone.

- È possibile vivere per sempre?
- L'universo avrà una fine? E ha avuto un inizio?
- L'universo ha un contorno o è di dimensioni illimitate?

C'è poi l'infinito trascendente, legato all'idea di Dio.

L'INFINITO NELLE COSE UMANE FINITE

Non riguarda solo la filosofia, la religione, l'astronomia, le scienze e la matematica, ma è presente anche

- Nella letteratura
- Nel teatro
- Nell'arte
- …

L'INFINITO IN LETTERATURA

L'infinito di cui parla Leopardi nella poesia, è un infinito che coinvolge lo spazio e il tempo.

"Sempre caro mi fu quest'ermo colle,
e questa siepe, che da tanta parte
dell'ultimo orizzonte il guardo esclude.
Ma sedendo e mirando, ***interminati***
spazi di là da quella*, e sovrumani*
silenzi, e profondissima quiete
io nel pensier mi fingo, ove per poco
il cor non si spaura. E come il vento
odo stormir tra queste piante, io quello
infinito silenzio *a questa voce*
vo comparando: ***e mi sovvien l'eterno,***
e le morte stagioni, e la presente
e viva, e il suon di lei. Così ***tra questa***
immensità s'annega il pensier mio*:*
e il naufragar m'è dolce in questo mare."

L'INFINITO IN TEATRO

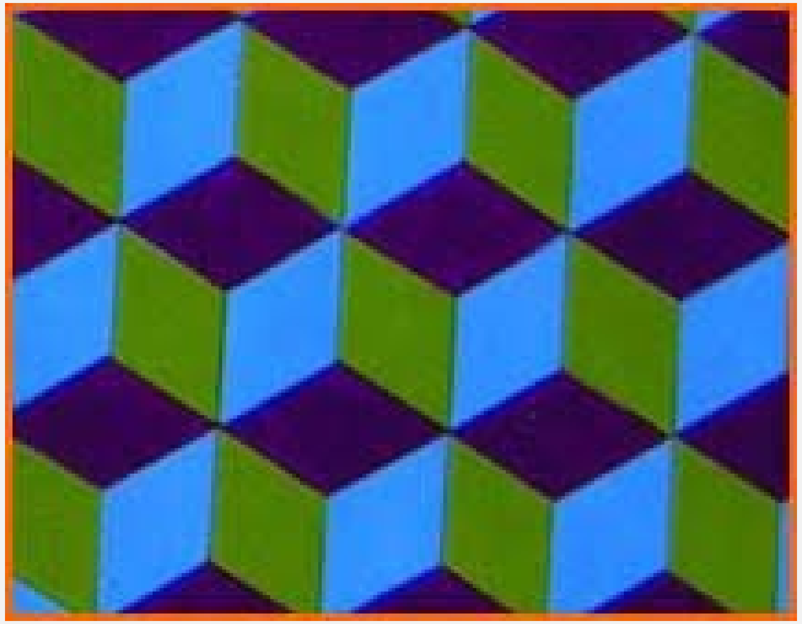
Infinities è uno spettacolo teatrale, sceneggiato da Luca Ronconi. L'autore, l'astrofisico inglese John D. Barrow, ha rappresentato cinque paradossi logico-matematici intorno al concetto di infinito.

Il primo scenario è quello dell'Albergo di Hilbert, un hotel dall'infinito numero di stanze, in cui dev'essere collocato un infinito numero di ospiti, senza che due di essi si trovino nella stessa stanza, o che una sola stanza resti libera.

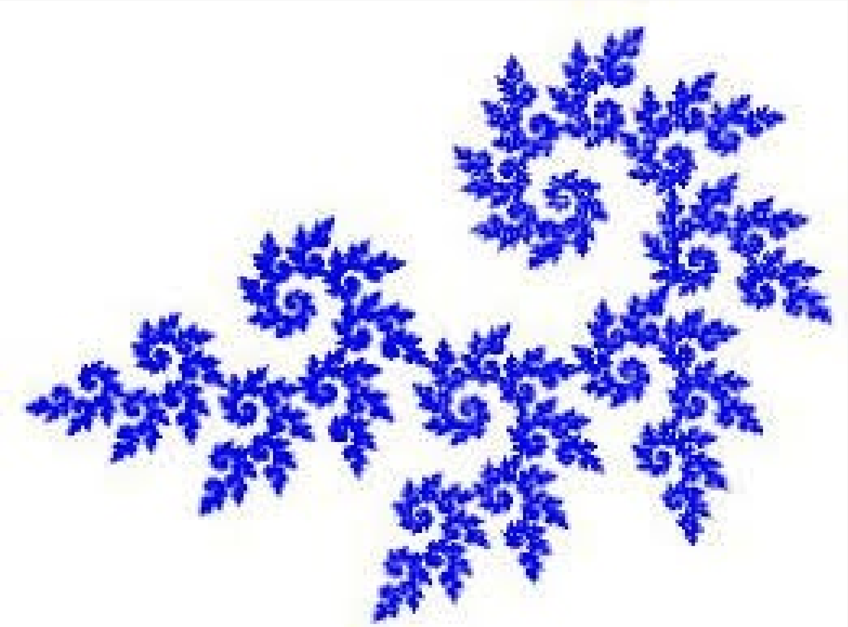
L'INFINITO NELL'ARTE

La costruzione di questi **motivi grafici** si collega all'infinito in due modi:

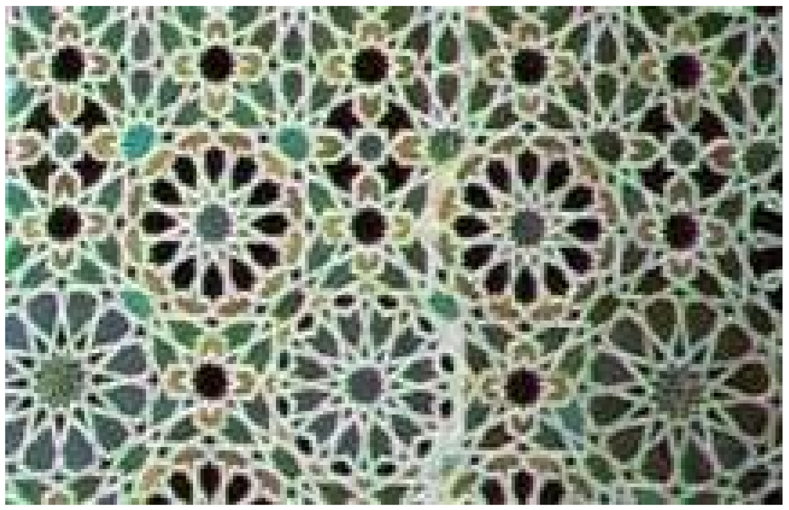
esplicitamente, con le **tassellazioni,** la ripetizione all'infinito di un unico disegno affiancato a sé stesso

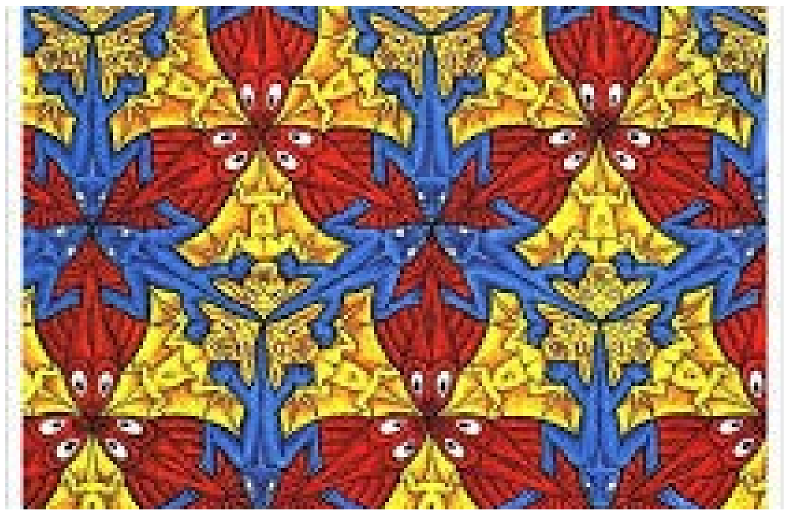


implicitamente, con i **frattali,** un procedimento di ripetizione di una figura che mantiene la forma e cambia scala ad ogni applicazione



LE TASSELLAZIONI





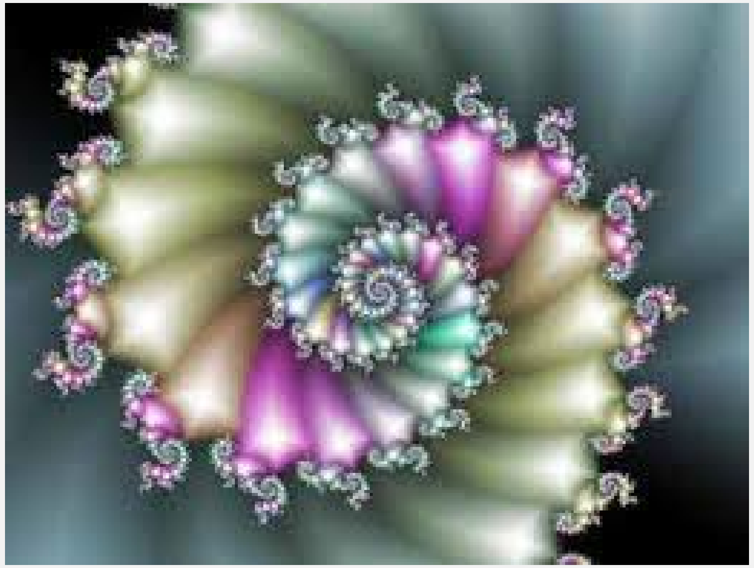
Esempi significativi si trovano nel mondo islamico dove la tassellatura ha applicato **le isometrie matematiche** in tutti i modi che oggi sappiamo possibili (17).

Anche divieti di carattere religioso che in **alcune culture impedivano la rappresentazione di esseri viventi** hanno contribuito ad orientare l'impulso creativo verso tale esplorazione dell'infinito in forma finita.

Le tassellazioni non richiedono contorni. L'esempio più semplice: utilizzare un poligono regolare, triangolo, quadrato, esagono, … ma già col pentagono regolare non funziona.

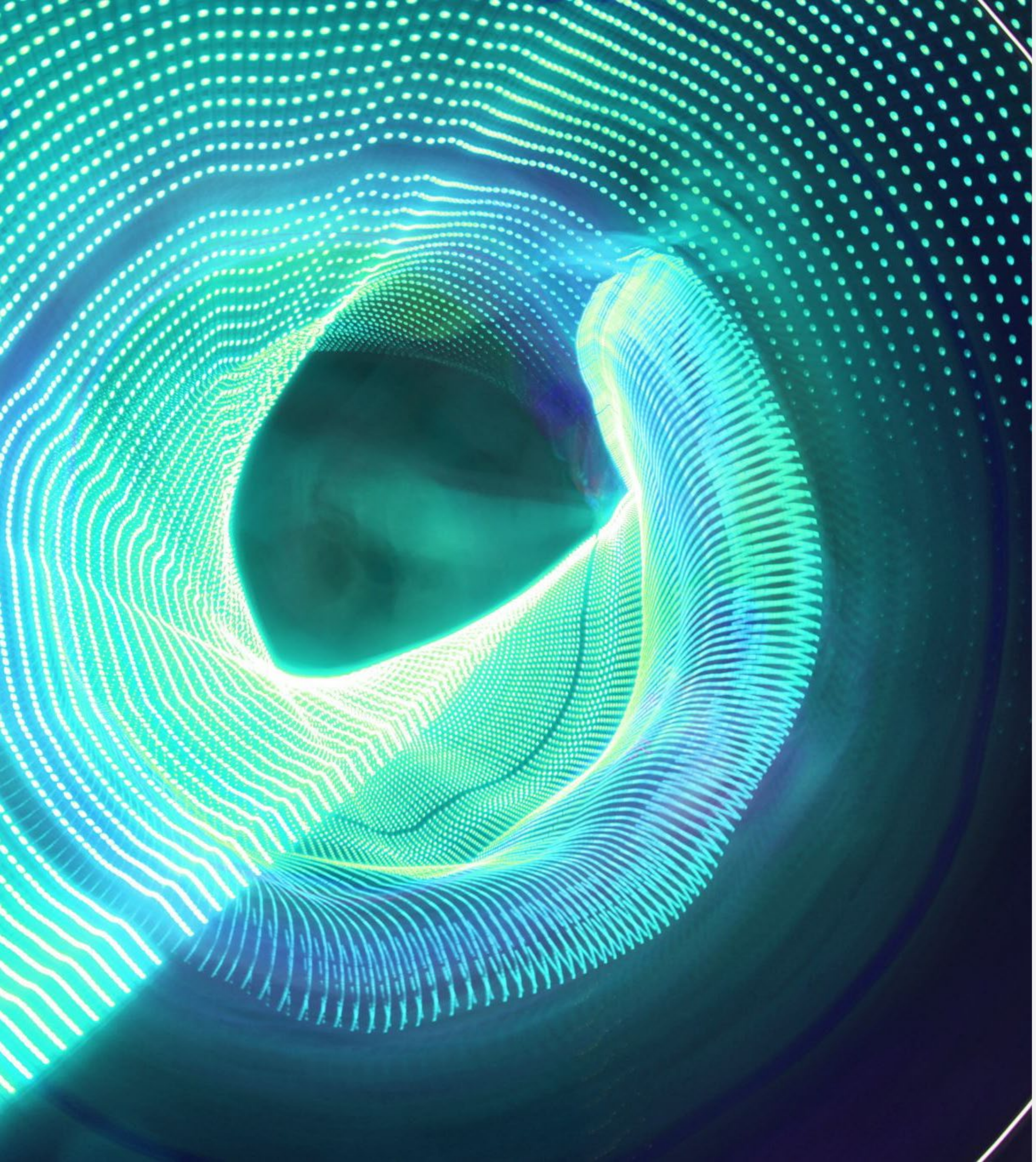
I FRATTALI

Un **frattale** è un oggetto geometrico che si ripete nella sua forma allo stesso modo su scale diverse.
Ingrandendo o rimpicciolendo una qualunque sua parte si ottiene una figura simile all'originale.



Questa caratteristica, chiamata **auto similarità**, si riscontra in natura nella disposizione dei rami degli alberi, nella struttura delle piante, in un fiocco di neve … Rendere la superficie frastagliata significa accrescerla e aumentarne la capacità di assorbire sostanze nutrienti senza aumentare volume e peso.

In natura il processo iterativo che genera un frattale non si ripete mai infinite volte, ma crea una sequenza di strutture che indica l'infinito



FASCINO E MISTERO

Numerosi problemi hanno condotto l'uomo verso l'esplorazione dell'**affascinante e misterioso** mondo dell'infinito.

I tanti interrogativi che sono emersi hanno alimentato

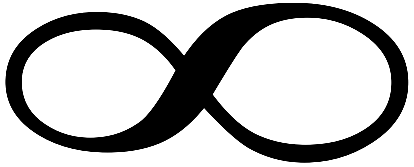
- da un lato **il bisogno di infinito**
- dall'altro **la paura di infinito**.

CHE CONFUSIONE!

- Tanti i casi in cui il pensiero greco (non solo quello greco) trovò difficoltà a cercare una soluzione
- Fatti contrari a ciò che ci suggerisce l'intuizione, i paradossi, hanno spesso generato perplessità, ma alla confusione intorno all'infinito ha contribuito anche la difficolta a distinguere l'infinito potenziale e l'infinito attuale
- Anche la teoria cantoriana degli insiemi ha dato origine ad alcuni paradossi, ma ha anche stimolato una continua ricerca di soluzioni che ha spesso consentito di superare gli ostacoli

L'INFINITO NEL PERCORSO SCOLASTICO

- Numeri naturali
- Numeri periodici e numeri irrazionali (infinite cifre decimali)
- Successioni e limiti
- Induzione e generalizzazione
- Retta
- V postulato
- .....



LE PROBLEMATICHE LEGATE ALL'INFINITO MATEMATICO

- I numeri naturali, i numeri razionali, gli irrazionali, i numeri reali sono infiniti.
  - Tutti gli infiniti sono uguali o si tratta di forme diverse di infinito?
  - Sono "di più" i numeri naturali o i numeri pari?
- Sono "di più" i punti di un segmento o quelli di una retta?
- Infinito potenziale o infinito attuale?
- I paradossi

MA SOPRATTUTTO, QUALE INFINITO?

L'INFINITO POTENZIALE

L'infinito potenziale è una conquista che facciamo spontaneamente nell'infanzia:

- **la possibilità di aggiungere sempre uno** al contatore, cioè di procedere sempre oltre, senza un elemento ultimo
- **il gioco degli specchi** con l'immagine che rimbalza nell'immagine dell'immagine
- **lo spazio come un cubo accrescibile** che risponde all'impossibilità di pensare una fine dello spazio.

L'INFINITO ATTUALE

L'*infinito attuale*, rifiutato a lungo da matematici e da filosofi

- si presenta invece come **qualcosa di concreto e compiuto**
- l'insieme dei punti di **un segmento**, che può essere concepito come una collezione infinita di punti
- si nasconde in **un numero**, come $\sqrt{2}$.

∞

Si parlava di infinito fin dai tempi di Zenone, sia in filosofia, sia in matematica.

Erano citati frequentemente esempi di grandezze infinitamente grandi o infinitamente piccole, per sottolineare **l'incompletezza del processo**, ma nessuno prima del 1872 era stato in grado di dire esattamente di cosa stesse parlando.

GEORG CANTOR

George Cantor (1845/1918), figlio di un commerciante danese, nato in Russia, tedesco per studi e formazione, era affascinato dall'infinito e creò la teoria degli insiemi che i fornì i mezzi per esplorare i misteri dell'infinito.

L'infinito attuale è stato rifiutato a lungo da matematici e da filosofi anche nell'ultimo secolo, nonostante la completa cornice teorica fornita da Georg Cantor con

la teoria degli insiemi

A = # B

Nel caso di *insiemi finiti* si dice che due insiemi A e B sono *equipotenti* o che *hanno lo stesso numero cardinale* se tra di essi è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca.

Detto in altri termini:

se, togliendo da ciascuno di essi un elemento per volta, essi si esauriscono contemporaneamente.

Cantor e Dedekind ebbero il merito di
estendere questo semplice concetto di equipotenza agli insiemi infiniti

$\# N = \# N_P$

I numeri naturali sembrano essere il doppio dei numeri pari.

Disponiamo i numeri nel modo seguente:

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**....**
0	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**....**

Fra i due insiemi esiste una corrispondenza biunivoca

Sebbene *Np* sia sottoinsieme di *N*, i due insiemi sono equipotenti

E non è l'unica stranezza!

1	2	3	4	5	6	…	n	…
2	4	6	8	10	12	…	2n	
1	3	5	7	9	11	…	2n-1	…
1	4	9	16	25	36	…	n^2	…
2	4	8	16	32	64	…	2^n	…

Rispunta la caratteristica:
<u>l'insieme infinito N equipotente ad un suo sottoinsieme proprio</u>

<u>Un sistema S si dice infinito</u> *<u>quando è simile ad una propria parte;</u>*

<u>in caso contrario S si dice un sistema finito.</u>

Dedekind per primo vide in questa ’’anomalia’’ una proprietà universale degli insiemi infiniti, proprietà che egli assunse come una precisa **definizione**

Con una terminologia più attuale:

Un insieme S si dice infinito se esiste un suo sottoinsieme proprio S’ i cui elementi possono essere messi in corrispondenza biunivoca con gli elementi di S.

PRIMO FATTO INCREDIBILE:
<u>UNA PARTE PUÒ ESSERE EQUIVALENTE AL TUTTO</u>

Tale sconcertante risultato sembra violare un principio fondamentale

il tutto è maggiore della parte

La conclusione non è assurda ma semplicemente paradossale, cioè in contrasto col senso comune.

Ma il senso comune viene dall'abitudine a considerare insiemi finiti

PER L'INFINITO NON È DETTO CHE VALGANO LE STESSE LEGGI DEL FINITO

I PARADOSSI DELL’INFINITO

Apriamo una parentesi sui *paradossi dell’infinito* che ci aiuteranno a mettere a fuoco qualcuna delle tante “stranezze” legate all’infinito

PARADOSSO O ANTINOMIA

Cantor comprende che si tratta di situazioni “al di là del credibile” ma non assurde, paradossi e antinomie.

Paradosso, dal greco παρα (oltre) e δοξα (opinione), fatto sorprendente, *contrario all’opinione corrente, al senso comune*;

Antinomia, dal greco αντι (contro) e νομος (legge) “*contro la legge, contraddizione*”. Prevede la compresenza di due affermazioni contraddittorie che possono essere entrambe dimostrate o giustificate.

Assurdo, dal latino *absurdus* “*stonato*”, in disaccordo, che non si può accettare.

Se vogliamo percorrere la strada dell’infinito dobbiamo rinunciare al senso comune ed accettare ogni conclusione.

MOLTA CAUTELA CON L'INFINITO!

Poniamo $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$

e moltiplichiamo per 2 $2S = 2 + 4 + 8 + \dots$

I secondi membri differiscono solo per la presenza di "1" nella prima uguaglianza. Pertanto: $2S = S - 1$

da cui: $S = -1$

cioè $1 + 2 + 3 + 4 + 8 + \dots = -1$

Non possiamo utilizzare per l'infinito le stesse regole che usiamo al finito.

Numeri "infinitamente grandi" hanno proprietà diverse dal solito.

SECONDO PARADOSSO NUMERICO

Proviamo a calcolare la somma T:

$$T = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Se scriviamo T raccogliendo i termini come segue:

$$T = (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots$$

cioè prendendo i termini a coppie, avremo una somma di zeri, per cui è T = 0.

Se invece riscriviamo T raccogliendo i termini diversamente:

$$T = 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots$$

stavolta avremo 1 più una somma di zeri, per cui è T = 1.

Stesso calcolo e risultati differenti.

E non basta. Se raggruppiamo prendendo due termini di posto dispari e uno di posto pari cioè:

$$T = (1+1-1) + (1+1-1) + (1+1-1) + (1+1-1) + \dots = 1+1+1+1+1+1+1\dots$$

otteniamo che T è una somma illimitata di 1, cioè infinito.

PITAGORA E $\sqrt{2}$

Il teorema di Pitagora applicato ad un triangolo rettangolo isoscele di lato 1, fornisce come misura dell’ipotenusa $\sqrt{2}$.

Questo numero fu per Pitagora e la sua scuola una vera spina nel fianco, perché $\sqrt{2}$:

- si può rappresentare con un segmento geometrico ben definito
- non è un razionale, pertanto non è periodico
- è un decimale irrazionale con infinite cifre dopo la virgola *1,41421356…*

$\sqrt{2}$ diventa così non solo un infinito inserito in un numero ma, rappresentabile con un segmento, diventava un infinito concreto.

L'ALBERGO DI HILBERT

Si deve a David Hilbert (1862-1943)

In un hotel con infinite stanze, numerate e tutte occupate, sarà sempre possibile ospitare nuovi ospiti, anche se il loro numero è infinito.

L'ALBERGO È AL COMPLETO E HA UN NUMERO INFINITO DI STANZE

Per ospitare un nuovo cliente basta sistemare ognuno degli ospiti nella stanza successiva a quella occupata ($n \rightarrow n+1$) liberando così la prima per il nuovo arrivato.

E se arriva un altro cliente basta ripetere l'operazione.

Per trovare posto ad un numero infinito di nuovi avventori, basta spostare ogni ospite nella stanza con numero doppio rispetto a quella occupata ($n \rightarrow 2n$), liberando così tutte le stanze con numero dispari per collocare gli infiniti nuovi arrivati

1	2	3	4	5	6	…

E questo nonostante l'albergo sia già al completo.

PARADOSSO DEL BARBIERE

Il paradosso di Russell è anche noto come *Paradosso del barbiere*.

In un villaggio c'è un solo barbiere che fa la barba a tutti coloro che non si fanno la barba da soli, e solo a loro. La domanda è: "Chi rade il barbiere?".

Da barbiere potrebbe radere sé stesso, ma non può farlo perché si raderebbe da solo contraddicendo la premessa che lui rade solamente chi non si rade da solo, e *da cliente* non potrebbe andare dal barbiere perché si fa la barba da solo.

Per il barbiere farsi la barba diventa un problema irrisolvibile!

PARADOSSO E ANTINOMIA

Differenza tra paradosso e antinomia:

- un paradosso è una conclusione logica che si scontra con il nostro modo abituale di vedere le cose
- un'antinomia è una proposizione che risulta autocontraddittoria sia nel caso che sia vera, sia nel caso che sia falsa.

L'antinomia di Epimenide o Paradosso del mentitore. probabilmente la più antica dalla storia della filosofia, può essere espressa in vari modi, per es.

«*Io mento*»

La proposizione è vera o falsa?

- se la proposizione è vera allora il suo significato implica che sia falsa
- se è falsa ciò significa che è vera

Appare contemporaneamente vera e falsa.


TORNIAMO A CANTOR

Diremo *numerabile* ogni insieme equipotente all'insieme *N* dei numeri naturali.

Il cardinale (o potenza) di un insieme numerabile si indica con *Alef zero* che è la prima lettera dell'alfabeto ebraico.

I suo simbolo è $\aleph_0$

Esistono insiemi infiniti non numerabili, cioè insiemi con una potenza superiore ad $\aleph_0$?

ALEF ZERO

$\aleph_0$

Proviamo con Q^+. Non sembra numerabile. È un insieme "denso" e i suoi elementi non possono essere contati.
Cantor dimostrò che non è così costruendo la seguente tabella:

L'insieme Q^+ dei numeri razionali assoluti						
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	…
$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	…
$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	…
$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	…
$\frac{0}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	…
…	…	…	…	…	…	…

In essa trovano posto tutte le frazioni. In un percorso per diagonali, è possibile contarle e concludere che Q^+ è numerabile.
Sono quindi numerabili anche l'insieme Z e l'insieme Q dei numeri razionali: **La loro potenza è sempre** $\aleph_0$

TUTTI GLI INSIEMI NUMERICI INFINITI HANNO LA STESSA POTENZA?

Cantor dimostra che ciò non è vero ricorrendo ad una *reductio ad absurdum.*

LA DIMOSTRAZIONE DI CANTOR

L'insieme dei numeri reali compresi fra 0 e 1 ha una potenza maggiore di quella di N

Cantor ipotizza che tutti i numeri reali compresi fra 0 e 1 :

- siano espressi da numeri decimali illimitati
- Possano essere ordinati in modo numerabile:

$$a_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}.....$$
$$a_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}.....$$
$$a_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}.....$$
$$.........................$$

dove a_{ij} è una cifra compresa fra 0 e 9.

Cantor costruisce un numero decimale illimitato diverso da quelli elencati:

$$b = 0, b_1b_2b_3.....$$

dove $b_k = 9 \quad \text{se } a_{kk} = 1$

$b_k = 1 \quad \text{se } a_{kk} \neq 1.$

Questo numero reale compreso fra 0 e1 sarà diverso da ciascuno dei numeri a_n dell'elenco precedente, che per ipotesi avrebbe dovuto contenere tutti i numeri reali compresi fra 0 e 1.

ALEF UNO $\aleph_1$

Cantor dimostra così che l'insieme dei numeri reali compresi fra 0 e 1 ha potenza superiore ad $\aleph_0$

Tale insieme ha la

potenza del continuo

che indica col simbolo $\aleph_1$ il secondo numero cardinale trasfinito.

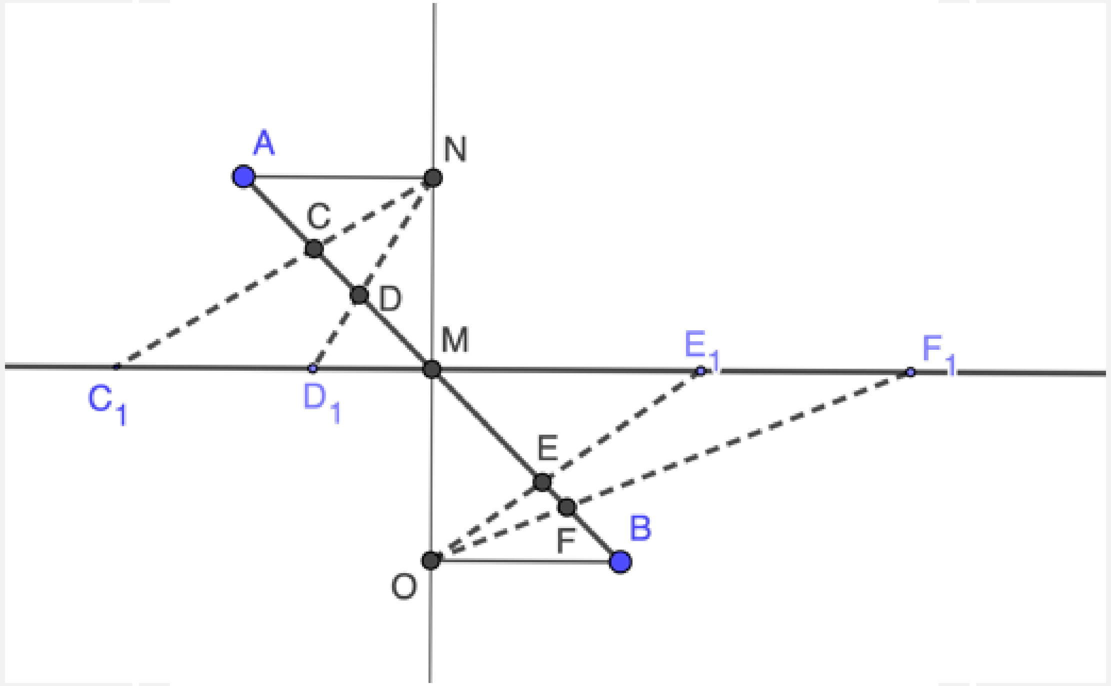
RETTA E SEGMENTO

Il passo successivo fu di provare che la potenza dell'insieme dei punti di una retta è uguale alla potenza dell'insieme dei punti di un segmento.

Se disponiamo una retta e il segmento AB come in figura, è possibile creare una corrispondenza biunivoca fra i punti dei due insiemi.

Come è possibile che una retta illimitata e un qualsiasi segmento limitato abbiano lo stesso numero di punti?

Anche qui paradosso, non assurdo.



IPOTESI DEL CONTINUO

Hanno la potenza del continuo

- **l'insieme dei punti di un segmento**
- **l'insieme dei numeri reali**,
- **l'insieme dei punti di una retta**,
- **l'insieme dei numeri irrazionali**.

Non è stato trovato un insieme che abbia potenza compresa fra quella del numerabile e quella del continuo.

I matematici hanno perciò avanzato l'ipotesi che tale insieme non esista (**ipotesi del continuo**).

Cantor prova poi che per ogni numero cardinale transfinito se ne può trovare sempre uno maggiore.

Dimostra che l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme ha potenza maggiore di quella dell'insieme stesso. Preso l'insieme *R* dei numeri reali, la potenza dell'insieme dei suoi sottoinsiemi è maggiore di $\aleph_1$

Poiché tale processo si può continuare

ESISTONO INFINITI NUMERI TRANSFINITI

Le sorprese non sono ancora finite!

C'è un secondo fatto incredibile

I PUNTI DELLO SPAZIO SONO TANTI QUANTI QUELLI DI UN SEGMENTO PICCOLO A PIACERE

Cantor **<u>dimostra</u>** che:

Un quadrato di lato 1, un cubo di lato 1 e l'intero spazio hanno tanti punti quanti ne ha un segmento

Lo stesso Cantor fu tanto impressionato da questa sua scoperta da scrivere a Dedekind comunicandogliela:

"Lo vedo, ma non lo credo!".

La ragione mi dice di si,

ma il fatto mi appare incredibile.

I risultati ottenuti indussero Cantor a formulare la teoria degli insiemi come parte della matematica a sé stante, ma dovette fare grandi sforzi per convincere i contemporanei della validità delle sue teorie.

Essi erano riluttanti ad ammettere l'infinito attuale e nutrivano ancora un considerevole ***horror infiniti***

NEL 1831 **GAUSS** ESPONE COSÌ IL SUO "ORRORE PER L'INFINITO REALE"

"Protesto contro l'uso della grandezza infinita come qualche cosa di compiuto, ciò che non è ammissibile in matematica. L'infinito è semplicemente un modo di esprimersi; il suo vero senso è un limite al quale certi rapporti si avvicinano indefinitamente, mentre altri possono crescere senza restrizione."

HILBERT ESPRIME CON ENTUSIASMO UNA GRANDE FEDE NEL CANTORISMO

"La teoria di Cantor mi sembra il più stupefacente prodotto del pensiero matematico, una delle applicazioni più sublimi dei processi intellettuali dell'uomo"

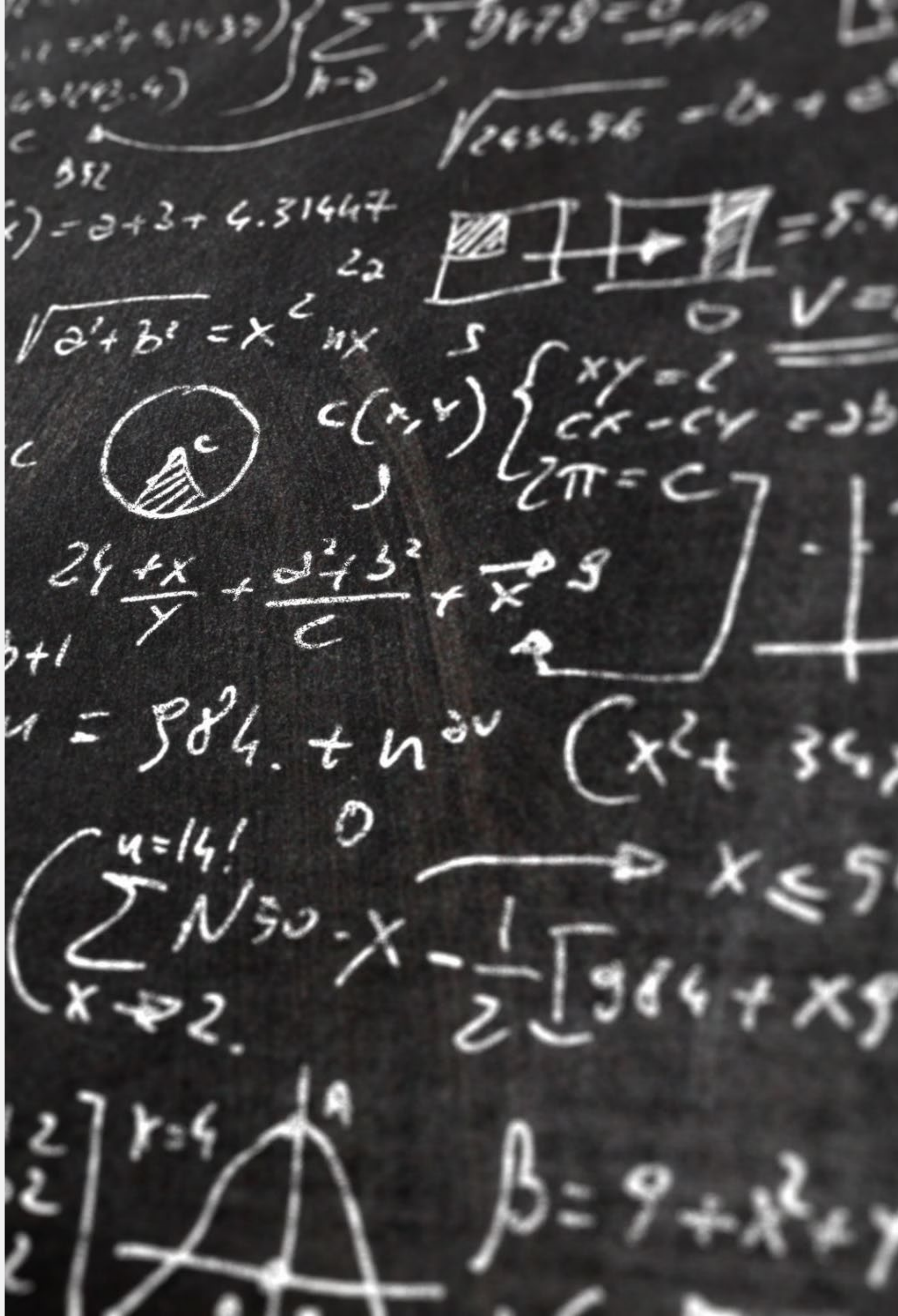
"<u>Nessuno ci scaccerà dal paradiso che Cantor ha creato per noi</u>".

IL RICONOSCIMENTO DELLA COMUNITÀ MATEMATICA

Per Cantor è l'uso erroneo dell'infinito in matematica, dovuto alla la confusione fra infinito potenziale e infinito attuale, che ha ispirato a molti matematici un orrore dell'infinito simile a quello provato da Gauss.

Progressivamente la nozione di infinito attuale ha ottenuto il riconoscimento della comunità matematica ed è divenuta una delle principali fonti di ispirazione.

La teoria cantoriana degli insiemi ha dato origine ad alcuni paradossi, ma ha anche dato origine ad una continua ricerca di soluzioni.



BERTRAND **RUSSELL** (1901)

diceva a proposito della maniera in cui Cantor aveva affrontato l'infinito:

"Zenone si era occupato di tre problemi ... quello dell'infinitesimale, quello dell'infinito e quello della continuità ...

Dalla sua epoca alla nostra i più grandi spiriti di ogni generazione hanno studiato questi problemi, senza peraltro venirne a capo ... Weierstrass, Dedekind e Cantor ... li hanno completamente risolti.

Le loro soluzioni sono così chiare che non lasciano più la minima ombra di difficoltà ...

Il problema dell'infinitamente piccolo è stato risolto da Weierstrass, Dedekind ha cominciato la soluzione degli altri due e Cantor l'ha definitivamente completata."

FREGE A RUSSELL NEL GIUGNO 1902

Frege:*“Non c’è nulla di più spiacevole per uno scienziato che vedere i fondamenti della sua opera crollare al momento stesso in cui l’opera viene terminata. Io sono stato messo in questa situazione da una lettera del sig. Bertand Russell ricevuta nel momento in cui il mio lavoro era quasi sotto stampa”*

Russell aveva mandato a Frege la sua antinomia del “gruppo di tutti i gruppi che non sono membri di sé stessi”. Questo gruppo è membro di sé stesso? Qualunque sia la risposta, dopo un poco di riflessione ci si accorge che è falsa. Ora Frege aveva usato largamente nel suo lavoro i

“gruppi di tutti i gruppi”.

“La vostra scoperta della contraddizione mi ha causato la più grande sorpresa e costernazione poiché ha scosso la base sulla quale intendevo costruire l’aritmetica”

IL CAMMINO PER ARRIVARE ALLA META È STATO MOLTO LUNGO

Ripercorrere il cammino di quanti si sono occupati dell’infinito può aiutare gli studenti a capire meglio cosa è la matematica e cosa significa “fare matematica”:

- la ricerca dello sviluppo storico del concetto di infinito attuale
- i collegamenti con le concezioni intuitive
- la discussione delle importanti intuizioni formulate dai matematici
- una presentazione formale della matematica abbinata a rilevanti aneddoti storici
- la constatazione che i grandi matematici hanno incontrato nella loro ricerca molte concezioni erronee.

Considerazioni di questo tipo possono rivelarsi utili anche per incoraggiare gli studenti ed incrementare la loro fiducia in sé stessi.

SULLE SPALLE DI GIGANTI

Una teoria non nasce "completa", va formandosi lentamente per tentativi ed errori, finché non si riesce a collegare tutti i tasselli e ad arrivare a un complesso coerente di conoscenze, spesso col contributo di molti.

Diceva Bernardo di Chartres (1130 circa):

> ***Noi siamo come nani sulle spalle di giganti, così che possiamo vedere più cose di loro e più lontane, non certo per l'acume della vista o l'altezza del nostro corpo, ma perché siamo sollevati e portati in alto dalla statura dei giganti.***

La cultura è una continua costruzione degli uomini. I pensatori moderni, pur nani rispetto ai grandi fondatori del sapere del passato, possono sopravanzarli e progredire proprio in virtù delle acquisizioni precedenti.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

- Lucio Lombardo Radice – *L'infinito* - Editori Riuniti
- John D. Barrow - *L'infinito* – Oscar Saggi Mondadori
- http://matematica.unibocconi.it/articoli/infinito-potenziale-e-infinito-attuale-nella-matematica-greca

GRAZIE A TUTTI VOI

ALTRO

NUMBERS
FILMATO DI GIOVANNI SCALIA

https://www.youtube.com/watch?v=A2W4P4eYyQk